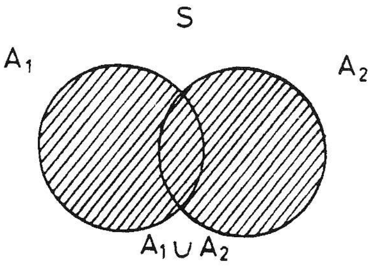
ZAKON VELIKIH BROJEVA pravilo koje pokazuje da ukoliko se broj jedinica promatranja u jednome ispitivanju povećava utoliko više dolazi do izražaja ono što je u promatranoj pojavi opće i zakonito. S obzirom na to da su statistička ispitivanja zasnovana na masovnom promatranju pojava i da je osnovni cilj statistike iznalaženje *općih, tipičnih osobina promatranih pojava,* zakon velikih brojeva ima veliki značaj i primjenu u statističkoj teoriji i praksi. Ista pojava promatrana u velikome broju slučajeva pokazuje određenu pravilnost, koja u malome broju slučajeva nije uočljiva. Statistički promatrano, značaj zakona velikih brojeva, djelomično je umanjen primjenom metode uzoraka.

1.3. TEORIJA SKUPOVA

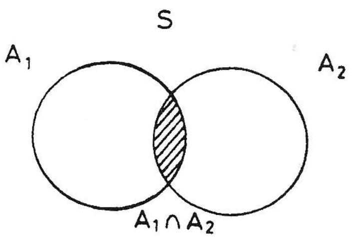
Teorija skupova je u svome razvoju od sredine 19. stoljeća postala jedan od osnovnih čimbenika koji se, osim u teoriji vjerojatnosti, rabi i u području elementarne i više matematike. Skup je moguće definirati kao preciznu specifikaciju različitih predmeta ili jedinki koji su njegovi *elementi* ili *članovi.* Osnovni skup, na primjer, mogu biti: *ispitivane biljke na određenoj parceli, životinje u leglu, priključna oruđa u nekoj radnoj jedinici, korovi ili štetnici na ispitivanim obradivim površinama i drugo.*



Slika 1.5. Unija skupova

Svaki osnovni skup moguće je rasčlaniti na manje cjeline, podskupove *(A, B, C...).* Podskupovi se u biometrici uobičajeno nazivaju uzorci i značajni su za teoriju uzoraka. Članovi podskupova ujedno su i elementi osnovnoga skupa *S.*

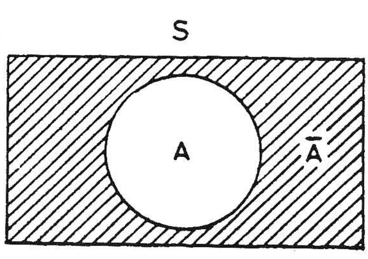
U prostoru elementarnih događaja kod osnovnoga skupa *S = (A,B,C,D)* podskupovi mogu biti sljedeći: *(∅), (A), (B), (C), (D), (A,B), (A,C), (A,D), (B,C), (B,D), (C,D), (A,B,C), (A,B,D), (A,C,D), (B,C,D), (A,B,C,D).*



Slika 1.6. Presjek skupova

U nekom pokusu, elementarni događaj mogući je ishod koji se ne može dalje raščlanjivati. Kod precizno određenoga prostora elementarnih događaja, moguće je na osnovi njegovih podskupova i drugih skupova izvoditi razne operacije.

Ako su, na primjer, A_1 i A_2 događaji *(podskupovi)* u prostoru događaja, odnosno ispitivanja, *uniju* dva događaja $(A_1 \cup A_2)$ čini skup čiji elementi pripadaju A_1 ili A_2 ili oba podskupa. U općem slučaju, kod *n* podskupova, njihova unija je skup elemenata u prostoru događaja *S* ili osnovnome skupu čiji elementi pripadaju bar jednome od $A_1, A_2, A_3, \dots A_n$ podskupova. Unija podskupova A_1 i A_2 prikazana je *Slikom 1.5.* i predstavlja je cijeli osjenčani prostor. Primjer za uniju skupova može biti sveukupnost uskolisnih i širokolisnih korova na ispitivanoj pokusnoj površini.



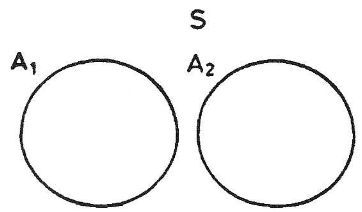
Slika 1.7. Komplement ili dopuna događaja *A*

Intersekcija ili *presjek* događaja A_1 i A_2 u prostoru *S* je skup čiji elementi pripadaju podskupu A_1 i podskupu A_2. To je prikazano *Slikom 1.6.*, gdje je intersekcija vidljiva kao osjenčani prostor. Primjer za presjek dvaju podskupova mogu biti korovi koji pripadaju porodici trava *(Poaceae).* Intersekcija dva podskupa u skupu *S* označava se kao presjek ili $A_1 \cap A_2$.

Komplement ili *dopuna* događaja A u prostoru S je skup elemenata koji ne pripadaju podskupu A i piše se kao $\bar{A}$. Iz navedenoga slijedi da je $A \cup \bar{A} = S$. Na *Slici 1.7.* dopuna je prikazana osjenčanim prostorom.

Kada je osnovni skup S u cijelosti određen, tada je to *siguran događaj*, odnosno, bez obzira na ishod pokusa, njega uvijek čine rezultati dobiveni na osnovi članova skupa S.

Komplement osnovnoga skupa S nema elemenata, naziva se *prazan skup* i označava se kao $\varnothing$. U pravilu, prazan skup je podskup svakoga skupa S i označava se kao $(\varnothing \cup S = S)$, a ujedno i njegov komplement, odnosno $\bar{S} = \varnothing$.

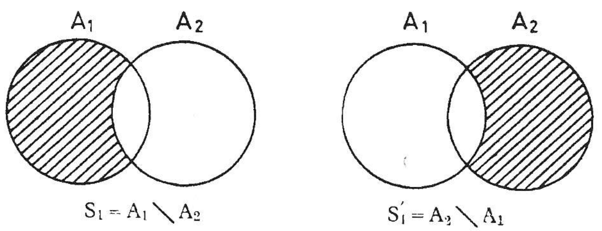


Slika 1.8. Dva međusobno isključiva događaja

Dva događaja A_1 i A_2 međusobno su isključiva kada aktivnost jednoga događaja isključuje drugi, odnosno kada nemaju zajedničkih elemenata, presjeka ili intersekcije. To se označava uobičajenom simbolikom kao $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Taj je odnos prikazan *Slikom 1.8.*

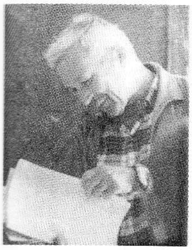
Razliku između skupova A_1 i A_2 čini skup S_1. To se piše kao $S_1 = A_1 \setminus A_2$, a čita kao A_1 manje A_2. Razliku između skupova A_2 i A_1 čini skup S'_1, odnosno $S'_1 = A_2 \setminus A_1$ *(Slika 1.9.)*.

PRIMJER 1.4. Pod pretpostavkom da skup A_1 predstavljaju svi korovi zabilježeni u pokusu postavljenom u četiri bloka po slučajnom bloknom sustavu, a skup A_2 korovi koji pripadaju prvome bloku, skup S_1 čine svi korovi koji ne pripadaju prvome bloku, odnosno zabilježeni su u blokovima drugome, trećemu i četvrtome. Skup S'_1 čine korovi prvoga bloka koji nisu pronađeni i notirani u drugome, trećemu i četvrtome bloku.



Slika 1.9. Razlika između skupova

9.2. AKSIOMI I TEOREME VJEROJATNOSTI



Slika 9.2.
Andrey Kolmogorov
(1903.-1987.)

Aksiomski ustroj vjerojatnosti razvio je ruski matematičar *Andrey Kolmogorov* početkom tridesetih godina dvadesetoga stoljeća. Prema tome ustroju, vjerojatnoća je definirana kao funkcija podskupova u prostoru događaja. Pri tom postoje dva važna preduvjeta:

1. *Teorija vjerojatnosti mora biti u potpunosti matematička. Na taj se način u teoriju vjerojatnosti uvodi pojam probabilistička matematika.*
2. *Teorija vjerojatnosti mora biti sukladna empirijskim činjenicama.*

Kod određenoga prostora događaja S, vjerojatnoća za svaki podskup A u S je neki realan broj. Vjerojatnoća od A označava se kao P(A) i prate je tri osnovna aksioma:

1. *Za svaki događaj A vrijedi sljedeće:* $0 \leq P(A) \leq 1$. *Po tome odnosu, vjerojatnoće su pozitivni realni brojevi, koji se kreću između 0 i 1.*

2. *Po drugome aksiomu, vjerojatnoća izvjesnih događaja jednaka je jedan, odnosno P(S) = 1. To znači da se jedan od više međusobno isključivih ishoda iz prostora događaja S mora pojaviti kod provođenja nekoga pokusa.*

3. *U slučajevima kada su događaji (podskupovi)* A_1 *i* A_2 *u prostoru događaja S međusobno isključivi* ($A_1 \cap A_2 = \varnothing$), *tada je* $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$. *To znači da je vjerojatnost unije podskupova* A_1 *i* A_2 *jednaka zbroju njihovih vjerojatnosti. Ako postoji n međusobno isključivih događaja, treći je aksiom moguće izraziti kao:* $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) \ldots P(A_n)$.

S matematičkoga motrišta, na osnovi ta tri aksioma, veza bilo kojega podskupa s elementima u prostoru događaja naziva se *funkcija vjerojatnosti.* Cjelokupni ustroj teorije vjerojatnosti, promatran kao formalan matematički sustav, razrađen je na osnovi ta tri aksioma.

PRIMJER 9.20. U pokusu s bacanjem kockice *(od 1 do 6 mogućih točkica - brojeva)* kod svakoga bacanja prostor elementarnih događaja je

$$S = (1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Šest elementarnih događaja su $A_1, A_2, A_3, \ldots . A_6$, s vjerojatnoćama $P(A_1) = \frac{1}{6}, \ldots, P(A_6) = \frac{1}{6}$.

Na taj način zadovoljena su sva tri aksioma i to:

1. Prvi aksiom: $0 \leq P(A) \leq 1$.

2. Drugi aksiom: *P(S) = 1 ili* $P(S) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$.

3. Treći aksiom: uz dva međusobno isključiva događaja A_1 i A_2, vjerojatnost da će se kod bacanja kockice dobiti jedinica ili dvojka je $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Događaji *(podskupovi)* na koje se odnose navedeni aksiomi ne moraju biti elementarni događaji. Pri tome se prostor događaja dijeli na međusobno isključive događaje.

PRIMJER 9.21. Ako se događaj *B* odnosi na dobivanje jedinice ili dvojke *(A_1, A_2)*, a događaj *C* na dobivanje trojke ili četvorke *(A_3, A_4)*, tada vrijedi sljedeće:

$$P(B) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

i

$$P(C) = P(A_3 \cup A_4) = P(A_3) + P(A_4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

odnosno

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Treći aksiom također je zadovoljen.

9.3. BAYESOV TEOREM

Slika 9.3.
Thomas Bayes
(1702.-1761.)

Engleski svećenik i matematičar *Thomas Bayes* bavio se problematikom iznalaženja zaključaka na osnovi induktivne inferencije. Dotadašnja iskustva matematičara temeljila su se na deduktivnome pristupu rješavanju problema. Pri tome se polazilo od određene hipoteze na osnovi vjerojatnoće *a priori*. *Bayes* je obrnutim postupkom došao do teoreme, pomoću koje se, na osnovi promatranja posljedica, utvrđuje hipoteza.

Matematičke postavke te teorije nisu sporne, već njena primjena u svezi s utvrđivanjem *a priori* vjerojatnosti. Značajniji interes za Bayesovu teoremu javlja se nakon Drugoga svjetskoga rata, kada statistička inferencija, zasnovana na klasičnoj teoriji vjerojatnosti, nije davala zadovoljavajuće odgovore pri rješavanju praktičnih problema.

Neka su A_1, A_2, ... A_i ... A_n međusobno nezavisni događaji u prostoru elementarnih događaja. Drugi međusobno isključivi događaji označeni su s B_j. Nastupanje jednoga od događaja *B* uvjetovano je događajem A_i, odnosno događaj B_j ne može nastupiti prije događaja A_i, tako da oni nisu nezavisni. Ako su vjerojatnosti $P(A_i)$ i uvjetna vjerojatnoća od B_j poznate, Bayesovim teoremom dolazi se do vjerojatnoće *a posteriori* događaja A_i, nakon nastupanja događaja *B*.

Matematički je to moguće opisati sljedećim odnosom:

$$P(A_1|B) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)\,\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_1)}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{A}_i)\,\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_i)}$$

Na osnovi multiplikativne teoreme, moguće je izvesti sljedeći odnos:

$$P(A_1)P(B|A_1) = P(B)P(A_1|B)$$

odakle je

$$P(A_1|B) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)\,\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_1)}{P(B)}$$

Pošto je nastupanje događaja *B* uvjetovano jednim od događaja A_i, vjerojatnost od *B* moguće je izraziti kao zbroj uvjetnih vjerojatnoća tog događaja, odnosno:

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \ldots + P(A_n)P(B|A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

Osnovni princip Bayesove teoreme bit će prikazan na osnovi sljedećega primjera:

PRIMJER 9.22. U kutijama *(A,B,C,D)* se nalaze sive i crne pelete, sa sljedećom raspodjelom:

A B C D

Jedna kutija izvučena je na slučajan način i iz nje je izvučena crna peleta. Koja je vjerojatnost da je izvučena kutija sadržavala samo crne pelete?

Kao prvo, postoje događaji A_1, A_2, A_3 *i* A_4 koji se odnose na izvlačenje jedne kutije. Vjerojatnosti njihovoga izvlačenja $P(A_1)$, $P(A_2)$, $P(A_3)$ *i* $P(A_4)$ su vjerojatnosti *a priori*. Dakle, kao što je već ranije napomenuto, procjena se donosi prije izvođenja pokusa na osnovi općega poznavanja uvjeta pod kojim će se pokus odvijati. U navedenome primjeru poznat je bio broj kutija *(4)*, broj peleta po kutiji *(4)*, ukupan broj peleta *(16)* te boja peleta – siva i crna.

Događaj *B* nastupa nakon jednoga od događaja *A*. U našemu slučaju on se već dogodio, izvučena je kutija i iz nje crna peleta. Vjerojatnosti izvlačenja crne pelete u uvjetima prethodno izvučene jedne od četiri kutije su $P(B|A_1)$, $P(B|A_2)$, $P(B|A_3)$, $P(B|A_4)$.

Za odgovor na postavljeno pitanje, da je izvučena kutija sadržavala samo crne pelete, rabit će se sljedeća tablica.

Tablica 9.4. A priori vjerojatnosti za slučajeve *A* i uvjetne vjerojatnosti za slučajeve *B*

A_i	$P(A_i)$	$P(B\|A_i)$	$P(A_i)$, $P(B\|A_i)$	$P(A_i\|B)$
A_1	¼	1	¼	¼ : ½ = ½
A_2	¼	½	⅛	⅛ : ½ = ¼
A_3	¼	½	⅛	⅛ : ½ = ¼
A_4	¼	0	0	0 : ½ = 0
Σ	1		½	1

U toj su tablici date vjerojatnosti za crnu peletu u uvjetima prethodnoga izvlačenja jedne od četiri kutije. Odgovor na pitanje nalazi se u prvome redu posljednjega stupca tablice, jer je:

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_1)} = \frac{0{,}25}{0{,}50} = \frac{1}{2}$$

U sličnim situacijama izračunavanje vjerojatnosti *a priori* za A_i nije problematična. Ujedno su te vjerojatnosti od znatnijega utjecaja za dobivanje vjerojatnosti *a posteriori*. U praktičnome radu često se iznalaze različite inačice primjene Bayesove teoreme.

Teorijske raspodjele učestalosti

Originalne, empirijske ili opažene raspodjele učestalosti formirane su grupiranjem opažanja ili elemenata skupa prema nekome obilježju. Raspodjele su nastale na osnovi egzaktnih podataka prikupljenih tijekom nekoga pokusa. Na osnovi grupiranja tih podataka *(klase ili razredi)* prema određenome obilježju, dobiven je prikaz apsolutnih i relativnih učestalosti datih razreda, uz njihov grafički prikaz *(histogram učestalosti)*.

Za razliku od empirijskih, izvornih ili opaženih raspodjela, postoje i *teorijske raspodjele.* Te se raspodjele mogu „očekivati" u skladu s našim iskustvom ili na osnovu određenih teorijskih pretpostavki. Pretpostavljaju se nekom statističkom modelu ili postavljaju kao hipoteza koju treba ispitati. Teorijske raspodjele zadane su analitički i za njih su unaprijed poznate osobine, kao, na primjer: aritmetička sredina, mod, medijana i druge, a pojavljuju se i u ulozi *raspodjele vjerojatnosti.*

Kod teorijskih raspodjela vrlo je bitan *zakon vjerojatnosti.* Taj se zakon primjenjuje glede količinske procjene stupnja mogućnosti događanja određenoga događaja, koja se zove i *vjerojatnoća događaja.* Mogući ili slučajan događaj je onaj koji se pod određenim okolnostima može, ali i ne mora dogoditi.

9.1. TEORIJA VJEROJATNOSTI I KOMBINATORIKA

Slika 9.1.
Daniel Bernoulli
(1700.-1782.)

Teorija vjerojatnosti utemeljena je u 17. stoljeću. Švicarski matematičar *Daniel Bernoulli*, postavio je teorijske osnove vjerojatnosti, kao matematičke discipline. Ta se teorija nadalje razvija kroz deterministički pogled na svijet *Pierre Simonea, Marquisa de Laplacea (1749.-1827.).* U svojim brojnim radovima *de Laplace* tvrdi da je vjerojatnoća sastavni dio prirodnih znanosti te, kroz teoriju pogrešaka, sustavno proučava sredinu i njenu varijabilnost kroz ponovljena mjerenja ili ponavljanja. Osobito značajan doprinos razvoju teorije vjerojatnosti dao je *Carl F. Gauss* kroz radove o normalnoj raspodjeli i zakonu pogrešaka. Razlog znatnijemu interesu za tu teoriju bio je osiguranje od rizika u veoma razvijenoj trgovini u talijanskim gradovima u razdoblju renesanse. Suvremena statistička teorija vjerojatnosti pretežito se zasniva na tzv. *Bayesovoj statistici,* odnosno teoremi.

Teorija vjerojatnosti intenzivno se rabi kod igara na sreću prilikom određivanja mogućnosti dobitka. Poznato je da su još stari Egipćani već 3500 godina prije nove ere igrali neke igre slične današnjoj kocki. Primjena te teorije u relativno novije vrijeme datira još iz 16. stoljeća. Oko 1560. godine, talijanski liječnik, profesor geometrije i strastveni kockar *Girolamo Cardano (1510.-1576.)* opisivao je teorijske mogućnosti izbora strana kockice prilikom njenog bacanja. I *Galileo Galilei* u svojim „Razmišljanjima o igrama kockom" 1620. godine posvetio je dio svog rukopisa vjerojatnosti različitih ishoda ako se igra dvjema kockama. Francuski matematičari *Blaise Pascal* i *Piere de Fermat* su oko 1655. godine započeli pismenu raspravu o zakonima vjerojatnosti kod igraće kocke. Mnogi brojni matematičari i znanstvenici bavili su se teorijskim pristupom igrama na sreću tijekom 19. i 20. stoljeća. Danas, često i veoma kompleksne i zahtijevne izračune mogućnosti dobitka, uporabom kombinatorike, obavljaju računala.

RAZLIKUJU SE DVA OSNOVNA MODALITETA VJEROJATNOSTI:

a) A PRIORI: procjena se donosi prije izvođenja pokusa, a izvodi se na osnovi općega i šire temeljitijega poznavanja uvjeta pod kojim će se pokus odvijati. Kod toga modaliteta vjerojatnosti unaprijed je poznat broj pokusnih elemenata, broj mogućih ishoda te broj povoljnih ishoda. Vjerojatnost se izračunava iz odnosa *P(A)= a / n:* vjerojatnost događaja A je odnos broja za njega povoljnih *a* i broja podjednako mogućih događaja *n.*

Vjerojatnost nekoga događaja moguće je definirati i kao broj koji svojom veličinom „mjeri" priliku (ne)pojavljivanja dotičnoga događaja. Vjerojatnost *P(A)* svakoga događaja A zadovoljava sljedeću nejednakost:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

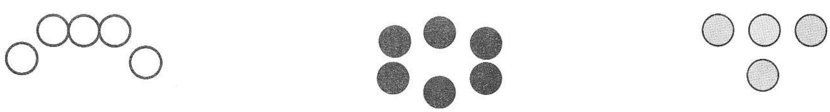
Ako niti jedan elementarni događaj ne realizira događaj *A,* tada je *P(A) = 0 (0%),* što znači da nemogućemu događaju pripada vjerojatnost jednaka nuli. U protivnome, kod događaja koji se neminovno moraju dogoditi *P(A) = 1* ili 100%.

PRIMJER 9.1. Svako od slova S, E, O, K, I, J zapisano je na jednome od šest listića. Listići su razmješteni potpuno slučajno.

Promatrani skup moguće je označiti kao: *S = (S, E, O, K, I, J).* Svaki element sadržan je u skupu samo jedanput. Kolika je vjerojatnoća da slova na razmještenim listićima formiraju riječ OSIJEK?

Broj kombinacija: n = 6! = 6*5*4*3*2*1 = 720 *(broj podjednako mogućih)* i a = 1 *(1 povoljan slučaj = tražena riječ „OSIJEK").* Sljedi da je P(A) = 1/720.

PRIMJER 9.2. U kutiji se nalazi 5 bijelih *(B),* 6 crnih *(C)* i 4 sive *(S)* kuglice. Kolika je vjerojatnost da ćemo kod jednoga izvlačenja izvući jednu bijelu ili jednu sivu kuglicu ?



P(B) = a/n = 5/15 = 0,33
(33% slučajeva)

P(S) = a/n = 4/15 = 0,27
(27% slučajeva)

b) A POSTERIORI: procjena se donosi nakon provedenoga pokusa. Potrebito je čekati na potpuno nepoznat ishod događaja *(na primjer, koliko će nastati okruglih, četvrtastih ili trokutastih pločica nekoga materijala u nekom fiktivnom tehnološkom procesu)* i tada, na osnovi tih vrijednosti, izračunati vjerojatnost *P.* U tomu se slučaju skup sastoji od beskonačnoga broja definiranih elemenata *(okrugle, četvrtaste ili trokutaste pločice)*

Kombinatorika olakšava utvrđivanje veze između osnovnoga skupa i podskupova. To se ostvaruje izvjesnim sustavom pomoću kojega se postižu sve moguće raspodjele i grupacije za podskupove određenoga broja elemenata.

Glede načina raspodjele elemenata u podskupovima, kombinatorika se dijeli na *permutacije, kombinacije* i *varijacije.* U svojoj osnovi kombinatorika rabi *princip množenja ili multiplikacije.* Jedan pokus može imati n_1 mogućih ishoda, drugi n_2 itd. Ukupan broj mogućih ishoda u *k* pokusa, promatranih združeno, je $n_1 * n_2 * ... * n_k$. Tako, na primjer, kod pokusa s bacanjem jedne kockice postoji $n_1 = 6$ mogućih ishoda. Kod drugoga bacanja postoji iznova $n_2 = 6$ mogućih ishoda i tako nadalje. Ukupan broj mogućih ishoda kod tri uzastopna bacanja, na osnovi principa množenja, bio bi:

$$n_1 * n_2 * n_3 = 6 * 6 * 6 = 216$$

PRIMJER 9.3. Na putu od ekonomskoga dvorišta gazdinstva *(A)* do proizvodne ploče ili parcele *(B)* postoje tri pristupna puta $n_1 = 3$, a od parcele *(B)* do postrojenja za doradu ratarskih proizvoda i skladišnih prostora *(C)* četiri pristupna puta $n_2 = 4$.

Ukupan broj mogućih puteva od mjesta *(A)* do mjesta *(C)* je $n_1 * n_2 = 3 * 4 = 12$.

PRIMJER 9.4. Ako netko ima *n* mogućnosti da obavi jedan zadatak, *r* mogućnosti za drugi zadatak i *p* mogućnosti da obavi treći zadatak, tada je ukupni broj mogućih kombinacija obavljanja tih triju zadataka *nrp*.

Kada postoji *n* različitih elemenata, potrebito je odrediti njihove moguće raspodjele ili permutacije. Tih *n* elemenata moguće je poredati u jedan niz na više načina. Svaki takav poredak naziva se *permutacija*. Permutacije se razlikuju jedino po redosljedu elemenata niza. Prilikom izračunavanja broja permutacija moguće je poći od pretpostavke da su mjesta u nizu prazna. Drugim riječima, broj permutacija jednak je broju mogućih ponavljanja svih *n* mjesta u nizu. Prema principu množenja, bilo koji element može zauzeti prvo mjesto, drugo mjesto može zauzeti *n-1* elemenata, treće mjesto *n-2* elemenata i tako nadalje, sve do mjesta koje pripada posljednjem neraspoređenom elementu u datom poretku. Broj mogućih raspodjela od *n* elemenata je $n! = n(n-1)(n-2)(n-3)...itd.$ Navedeni niz tvore brojevi koji ukazuju na koliko se različitih načina može popuniti pojedino mjesto. Broj permutacija od *n* mogućih elemenata moguće je prikazati kao $P^{(n)} = n!$

Tablica 9.1. Faktorijeli

n	n!
0	1
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5.040
8	40.320
9	362.880
10	3.628.800
11	39.916.800
12	479.001.600
13	6.227.020.800
14	87.178.291.200
15	1.307.674.368.000
16	20.922.789.888.000
17	355.687.428.096.000
18	6.402.373.705.728.000
19	121.645.100.408.832.000
20	2.432.902.008.176.640.000

Umnožak prirodnih brojeva od 1 do *n* elemenata uobičajeno se označava kao *n!* i čita se kao *„en faktorijela“*.

Prema konvenciji $0! = 1$. Faktorijeli se naglo povećavaju povećanjem *n* elemenata skupa.

PRIMJER 9.5. Potrebito je smjestiti deset konja u za to predviđene boksove. Na koliko je načina to moguće obaviti?

Prvo grlo može se smjestiti u bilo koji od deset boksova. Drugo grlo moguće je smjestiti u bilo koji od preostalih devet boksova. Nakon njihovoga smještaja, treće grlo moguće je smjestiti u jedno od preostalih osam boksova i tako redom do smještaja posljednjega grla za koje ne postoji mogućnost izbora. Za svih deset grla postoji $P^{(10)} = 10! = 10 * 9 * 8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 3\,628\,800$ kombinacija, odnosno načina smještaja.

Varijacije su permutacije na osnovi podskupova od *r* elemenata uzetih istovremeno iz osnovnoga skupa od *n* elemenata. U općemu slučaju, broj varijacija je sljedeći:

$$V_r^{(n)} = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$$

Istovremenim množenjem i dijeljenjem gornjega izraza s $(n - r)!$ dobiva se sljedeća formula:

$$V_r^{(n)} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

U izrazu $V_r^{(n)}$ gornji indeks *(n)* označava red, a donji indeks *r* razred varijacije. Ta se formula rabi u slučajevima kada je između *n* elemenata potrebito odrediti broj mogućih permutacija za *r* tih elemenata. Kod varijacija bez ponavljanja uvijek mora biti $r \leq n$. U slučajevima kada je *r = n* varijacije prelaze u permutacije od *n* elemenata.

PRIMJER 9.6. Koliko se različitih razina od po četiri slova može napraviti od trideset slova, ako se pri tome ista slova ne ponavljaju dva ili više puta u jednome nizu? Nizovi koji sadrže ista slova, ali s različitim poretkom, smatraju se različitim; na primjer *ACDF* i *FCDA* nisu isti. Riječ je o varijacijama tridesetoga reda i četvrtoga razreda.

$$V_4^{(30)} = \frac{30!}{26!} = 30 * 29 * 28 * 27 = 657.720$$

PRIMJER 9.7. Ako su od deset grla *(n =10)* iz nekoga razloga četiri grla smještena u prva četiri boksa, na koliko je načina moguće rasporediti preostalih šest grla *(r = 6)*?

Na to je pitanje moguće odgovoriti uporabom sljedeće formule:

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{10!}{(10-6)!} = \frac{10!}{4!} = \frac{10 * 9 * 8 * 7 * 6 * 5 \cancel{* 4 * 3 * 2 * 1}}{\cancel{4 * 3 * 2 * 1}} = 10 * 9 * 8 * 7 * 6 * 5 = 151200$$

Preostalih šest grla moguće je rasporediti na 151200 načina.

Ista se formula može rabiti i u prethodnome primjeru, gdje niti jedno grlo još nije smješteno u boksove. U tom slučaju *n = r = 10.*

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{10!}{(10-10)!} = \frac{10!}{0!} = 10! = 3.628.800$$

U slučaju formiranja nizova od *r* elemenata, uz mogućnost da se u jednome nizu isti element pojavi dva ili više puta, dobivaju se varijacije *n* – toga reda i *r* – toga razreda s ponavljanjem. Glede ponavljanja, moguće je da je *r > n.* Prvo mjesto u nizu moguće je popuniti na *n* mogućih načina. Pri popunjavanju drugoga mjesta postoji iznova *n* elemenata. jer se, glede mogućnosti ponavljanja za drugo mjesto, rabi i onaj element koji je već rabljen za popunjavanje prvoga mjesta. Prema tome, prva dva mjesta u nizu moguće je popuniti na $nn = n^2$ različitih načina. Na sličan način i svako daljnje mjesto u nizu moguće je popuniti na *n* različitih načina. *Varijacije s ponavljanjem* izračunavaju se na osnovi sljedećega izraza:

$$\overline{V}_r^{(n)} = n^r$$

PRIMJER 9.8. Skup se sastoji od trideset slova. Koliko se različitih nizova od po tri slova može napraviti, ako su pri tom dopuštena i ponavljanja istih slova unutar jednoga niza?

$$\overline{V}_3^{(30)} = 30^3 = 27.000$$

PRIMJER 9.9. Koliki je broj permutacija kod skupa *A (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)*?

$$n! = 10! = 3628800$$

Vjerojatnost da se iz jednoga pokušaja pogodi unaprijed zadana kombinacija od deset brojeva *P(A)=1/n! = 1/ 3 628 800 = 0,000000275*, gotovo je beznačajna.

U slučaju da je očekivani ishod izvlačenja bilo koji unaprijed određeni pojedinačni broj od 0 do 9, vjerojatnost za svaki broj bila bi *P(A) = 1/n = 1/10 = 0.1,* odnosno *10%.*

Kada se od *n* različitih elemenata tvore nizovi od *r* elemenata, bez obzira na njihov poredak unutar niza, dobivaju se kombinacije *n* – toga reda i *r* – toga razreda. Dvije kombinacije razlikuju se jedino onda kada ne sadrže iste elemente. Vjerojatnost mogućih ishoda povećava se, a broj kombinacija izračunava na sljedeći način:

$$K_r^{(n)} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

NAPOMENA: Izraz $\binom{n}{r}$ zove se *binomni koeficijent* i čita se *„en nad er".*

Ako se u gornjemu izrazu skrati *n!* i *(n – r)!*, dobiva se nešto prikladnija formula za izračunavanje broja kombinacija:

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1*2*3\ldots(r-1)r}$$

Ta je formula prikladnija za izračunavanje broja kombinacija na osnovi manjeg broja elemenata niza, za razliku od gornje formule koju je uputnije rabiti ako su brojevi *n* i *r* prilično veliki.

PRIMJER 9.10. Skup se sastoji od *n = 10* različitih elemenata. Na koliko se načina može formirati uzorak od *r = 4* elementa? Kada je riječ o uzorku, bitan je njegov sadržaj, a ne raspored elemenata unutar uzorka. Stoga je svaki uzorak jedna kombinacija.

$$K_r^{(n)} = \binom{n}{r} = \binom{10}{4} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \frac{10!}{6!\,4!} = 210$$

ili

$$\binom{n}{r} = \binom{10}{4} = \frac{10*9*8*7}{1*2*3*4} = 210$$

Tablica 9.2. Binomni koeficijenti

n / r	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1								
3	3	1							
4	6	4	1						
5	10	10	5	1					
6	15	20	15	6	1				
7	21	35	35	21	7	1			
8	28	56	70	56	28	8	1		
9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
12	66	220	495	792	924	792	495	220	66
13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286
14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008
17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448
18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758
19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378
20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756

PRIMJER 9.11. Koliki je broj mogućih kombinacija, bez ponavljanja, od r = 2 slova iz skupa $S=(a,b,c,d,e)$?

$$K_r^{(n)} = \binom{n}{r} = \binom{5}{2} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{120}{6*2} = 10$$

a to su:

ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de

Shematski, kombinacije je moguće prikazati i tablično, na sljedeći način:

$K_r^{(n)}$	a	b	c	d	e
a	-	*ab*	*ac*	*ad*	*ae*
b	-	-	*bc*	*bd*	*be*
c	-	-	-	*cd*	*ce*
d	-	-	-	-	*de*
e	-	-	-	-	-

PRIMJER 9.12. Prilikom ispitivanja ispravnosti i učinkovitosti rada stroja za pakiranje sjemena, slučajno je odabrano pedeset paketa. Utvrđeno je četrdeset ispravnih i deset neispravnih paketa. Na koliko je načina moguće formirati uzorak od pet paketa, ali tako da u njemu budu tri ispravna i dva loše zapakirana paketa?

Tri ispravna od ukupno četrdeset ispravnih paketa moguće je uzeti na

$$K_3^{(40)} = \binom{40}{3} = \frac{40!}{37!\,3!} = \frac{40*39*38}{3*2*1} = 9.880$$

različitih načina, a dva loše zapakirana paketa od ukupno deset na

$$K_2^{(10)} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{8!\,2!} = \frac{10*9}{2*1} = 45$$

načina. Uzorak od tri ispravna i dva loše zapakirana paketa dobiva se spajanjem obje grupe. Pri tome svaka grupa ispravnih može doći sa svakom grupom loše zapakiranih paketa. Uzorak od tri ispravna i dva neispravna paketa moguće je formirati na

$$K_3^{(40)} K_2^{(10)} = \binom{40}{3}\binom{10}{2} = 9.880*45 = 444.600$$

različitih načina.

PRIMJER 9.13. Pri isporuci 100 sijaćica, proizvođač daje jamstvo da je među njima najviše 10% neispravnih (10 sijaćica). Nakon isporuke ispitano je slučajno odabranih 5 sijaćica. Uz pretpostavku da se u pošiljci nalazi 10 neispravnih sijaćica, kolika je vjerojatnost da se među ispitanim sijaćicama nađu 2 neispravne?

Kao prvo, potrebito je izračunati na koliko se načina može uzeti uzorak od pet sijaćica, a potom koliko je načina da se uzme uzorak u kojemu se nalaze dvije neispravne od pet sijaćica (40% sijaćica u uzorku)?

Iz pošiljke od sto sijaćica, uzorak od njih pet moguće je uzeti na:

$$n = \binom{100}{5} = \frac{100!}{95!\,5!} = 20 * 33 * 49 * 97 * 24$$

različitih načina. Dvije neispravne sijaćice od ukupno deset moguće je uzeti na $\binom{10}{2}$ različitih načina, a tri ispravne od ukupno devedeset na $\binom{90}{3}$ načina. Svaka grupa od dvije neispravne sijaćice može doći s tri ispravne pa se uzorak u kojemu se nalaze dvije neispravne i tri ispravne sijaćice može formirati na:

$$m = \binom{10}{2}\binom{90}{3} = \frac{10*9}{2*1}\,\frac{90*89*88}{3*2*1} = 5*9*30*89*44$$

različitih načina. Stoga se tražena vjerojatnost izračunava na sljedeći način:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{5*9*30*89*44}{20*33*49*97*24} = 0{,}07022$$

Isti rezultat moguće je dobiti i pomoću logaritama faktorijela na sljedeći način:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{\binom{10}{2}\binom{90}{3}}{\binom{100}{5}} = \frac{10!\,90!\,5!\,95!}{2!\,8!\,3!\,87!\,100!}$$

Iz *Tablice XIV.* (vidjeti u Prilogu) iščitaju se vrijednosti, posebno za brojnik, a posebno za nazivnik:

Brojnik		*Nazivnik*	
N	log *N*	*N*	log *N*
10!	6,5598	2!	0,3010
90!	138,1719	8!	4,6055
5!	2,0792	3!	0,7782
95!	148,0141	87!	132,3238
		100!	157,9700
Σ	294,8250	Σ	295,9785

Logaritmiranjem izraza za vjerojatnost *P* dobiva se:

log *P* = 294,8250 – 295,9785 = -1,1535

Antilogaritmiranjem te vrijednosti dobiva se identična vrijednost kao i u prethodnome izračunu, odnosno:

$$P = 0{,}07022 \text{ ili } 7{,}022\%.$$

Ako se doista dogodi da od pet slučajno odabranih sijaćica dvije budu neispravne, što je moguće zaključiti?

Na osnovi kontrole ispravnosti rada sijaćica i slučajno odabranoga uzorka izračunata je vjerojatnost događaja *(dvije neispravne i tri ispravne sijaćice)* i ona iznosi 7,022%. To znači da bi vjerojatnost ostvarenja toga događaja bila u sedam od sto slučajno uzetih uzoraka nepromijenjene veličine. Ako se prilikom ispitivanja taj događaj stvarno dogodio, opravdana bi bila sumnja da jamstvo proizvođača nije ispunjeno, odnosno da se u pošiljci nalazi više od deset neispravnih sijaćica.

PRIMJER 9.14. Koja je vjerojatnost da se između brojeva od 1 do 12 izvuku brojevi *(4, 6)*?

Tu se traži točan redoslijed elemenata i vjerojatnost se računa na sljedeći način:

$$V_r^{(n)} = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{12!}{10!} = 132$$

ili uz moguće kraćenje

$$V_r^{(n)} = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{12!}{10!} = \frac{12 * 11 * \cancel{10 * 9 * 8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}}{\cancel{10 * 9 * 8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}} = 12 * 11 = 132$$

Dakle, postoji 132 moguće grupe od po dva broja, od kojih je samo jedna *(4,6)*. Vjerojatnost da će se između brojeva od 1 do 12 izvući grupa *(4, 6)* je 1/132 = 0,007 (0,7%).

Taj je primjer moguće izračunati i pomoću *principa množenja i zbrajanja*. Vjerojatnost da će se prvo izvući broj četiri iznosi 1/12. Vjerojatnost da će se od preostalih jedanaest brojeva izvući broj šest je 1/11.

Prema tom, vjerojatnost za oba broja je:

$$P_{(4,6)} = \frac{1}{12} * \frac{1}{11} = \frac{1}{132}$$

Kod izvlačenja brojeva, bez obzira na redoslijed *(4,6)* ili *(6,4)*, vjerojatnost ishoda bitno se povećava i izračunava iz sljedećega odnosa:

$$K_r^{(n)} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \frac{12!}{10!\,2!} = 66$$

odnosno prema već opisanome principu, kao

$$P_{(4,6 \text{ ili } 6,4)} = \frac{1}{132} + \frac{1}{132} = \frac{2}{132} = \frac{1}{66}$$

Dakle, tu postoje dvije grupe koje sadrže dva ista broja, ali s različitim redoslijedom; na primjer *(4,6)* i *(6,4)* unutar kombinacije od sto trideset i dvije grupe. Stoga je i opravdana podjela na 1/132 + 1/132.

Vjerojatnost da će se između brojeva od 1 do 12 izvući brojevi *(4, 6)* ili *(6, 4)* ili bilo koje druge dvije, unaprijed određene grupe, iznosi 2/132, odnosno 1/66 = 0,015 (1,5%).

PRIMJER 9.15. Jedan nagradni kupon ubačen je u kutiju *A*, u kojoj je prebrojavanjem utvrđeno ukupno sto kupona. Drugi nagradni kupon ubačen je u kutiju *B*, s ukupno dvjesto kupona.

Koji nagradni kupon ima veću vjerojatnost dobitka?

P(A)=1/100 = 0,010 (1,0%)
P(B)=1/200 = 0,005 (0,5%)

Vidljivo je da nagradni kupon ubačen u kutiju *A* ima dva puta veću priliku da bude izvučen i osvoji nagradu.

Ako se u nagradnoj igri sudjeluje s većim brojem kupona, vjerojatnost dobitka nagrade povećava se proporcionalno broju kupona. U slučaju kutije *B* situacija je sljedeća:

Broj kupona	Mogućnost izvlačenja	Vjerojatnost dobitka	%
2	2/200	0,010	1,0
3	3/200	0,015	1,5
4	4/200	0,020	2,0
5	5/200	0,025	2,5
6	6/200	0,030	3,0
7	7/200	0,035	3,5
8	8/200	0,040	4,0

Vidljivo je da se sa svakim kuponom vjerojatnost dobitka povećava za 0,5%, odnosno proporcionalno povećava (posivljena polja).

PRIMJER 9.16. Ako se iz kutije A, pored prve nagrade, izvlače još druga i treća nagrada, vjerojatnosti da se jednim kuponom, kroz sva tri izvlačenja, osvoji bilo koja nagrada su sljedeće:

Nagrada	Broj kupona	Mogućnost izvlačenja	Vjerojatnost	%
1.	100	1/100	0,0100	1,00
2.	99	1/ 99	0,0101	1,01
3.	98	1/ 98	0,0102	1,02

Dakle, u svakom sljedećem izvlačenju šansa za dobitak se povećava, uz pretpostavku da jednom izvučeni kupon više ne sudjeluje u narednim izvlačenjima.

Tablica 9.3. Vjerojatnost dobitka nagrade povećava se pri svakom narednom izvlačenju

Nagrada	Broj kupona	Mogućnost izvlačenja	Vjerojatnost	%
20.	81	1/81	0,0123	1,23
30.	71	1/71	0,0140	1,40
40.	61	1/61	0,0163	1,63
50.	51	1/51	0,0196	1,96
60.	41	1/41	0,0243	2,43
70.	31	1/31	0,0322	3,22
80.	21	1/21	0,0476	4,76
90.	11	1/11	0,0909	9,09
95.	6	1/6	0,1666	16,66
96.	5	1/5	0,2000	20,00
97.	4	1/4	0,2500	25,00
98.	3	1/3	0,3333	33,33
99.	2	1/2	0,5000	50,00
100.	1	1/1	1,0000	100,00

PRIMJER 9.17. Katkada svi kuponi, pa i oni izvučeni u prethodnim kolima, imaju ponovljenu mogućnost izbora u završnome krugu izvlačenja za tzv. „glavnu nagradu".

Vjerojatnost da bilo koji kupon bude izvučen u završnome kolu izvlačenja, pod pretpostavkom da je sudjelovao i u prvome kolu, je sljedeća:

Kolo	Ukupni broj kupona	Kumulacija
1.	15000	15000
2.	12000	27000
3.	18000	45000
4.	19800	64800
5.	26000	90800

Dakle, ukupno je u svim kolima sudjelovalo 90 800 kupona. U posebnom, tzv. „šestome kolu", vjerojatnost izvlačenja glavne nagrade za bilo koji kupon je:

$$1 / 90800 = 0{,}000011 = 0{,}0011\%$$

U slučaju da je u svakome kolu u kutiju ubačen jedan kupon, vjerojatnost dobitka u završnome kolu bila bi znatno veća:

$$5 / 90800 = 0{,}000055 = 0{,}0055\%$$

S po dva ubačena kupona u svakome kolu, vjerojatnost dobitka raste i iznosi:

$$(5*2) / 90800 = 0{,}00011 = 0{,}011\%$$

itd.

Događaju koji je učestaliji kao ishod nekoga pokusa ili izvlačenja pripada i veća vjerojatnost.

PRIMJER 9.18. Kolika je vjerojatnost da se u igri pogđanja brojeva (na primjer „Loto") pogodi 6 od 45 brojeva:

$$K_r^{(n)} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \frac{45!}{39!\,6!} = \frac{45*44*43*42*41*40}{6!} = 8145060$$

Vjerojatnost je skoro neznatna i iznosi tek 1 : 8,145 milijuna.

Ako se uzima kombinacija 7 od 39 brojeva, vjerojatnost dobitka bila bi sljedeća:

$$K_r^{(n)} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \frac{39!}{32!\,7!} = \frac{39*38*37*36*35*34*33}{7!} = 15380937$$

Vjerojatnost dobitka gotovo je dva puta manja nego li u prethodnome slučaju i iznosi tek 1 : 15,381 milijuna.

PRIMJER 9.19. Ako u sportskoj prognozi treba pogoditi rezultate dvanaest utakmica u kojima su mogući ishodi (0, 1, 2), tada je mogući broj kombinacija

$$3*3*3*3*3*3*3*3*3*3*3*3 = 531441$$

Vjerojatnost pogađanja dobitne kombinacije je 1 / 531441 = 0,0000019, odnosno približno dva na milijun.