Neparametrijska statistika i testovi

Za razliku od parametrijskoga pristupa statističkoj analizi, katkada je potrebito rabiti i neparametrijske metode. Kod parametrijske statistike polazi se od izvjesnih pretpostavki o zajedničkom obliku i simetričnosti raspodjele učestalosti osnovnih skupova, kao i o jednakosti varijanci.

Navedene pretpostavke moraju biti ispunjene kod usporedbe srednjih vrijednosti (na primjer, pojedinačni testovi pri ispitivanju razlika srednjih vrijednosti tretmana u analizi varijance), standardnih devijacija ili proporcija. U slučaju neispunjavanja tih pretpostavki ili u slučaju opravdane sumnje u homogenost pokusnih podataka, pristupa se prikladnoj transformaciji podataka. Tehnika transformacije podataka opisana je u dvanaestomu poglavlju ovoga udžbenika. Transformacija pokusnih podataka trebala bi osigurati ispunjenje osnovnih preduvjeta za primjenu parametrijskih testova. Nakon transformacije, provodi se statistička analiza (na primjer analiza varijance) i, na osnovi njezinih rezultata, izvode valjani zaključci.

Danas je uobičajena metodološka praksa statističke analize pokusa postavljanje i ispitivanje nultih hipoteza, uz određivanje pragova značajnosti ili granica povjerenja. Međutim, često se ne polazi od pretpostavke o obliku raspodjele učestalosti jednoga ili više osnovnih skupova, odnosno ispitivane populacije. Za takav metodološki pristup uobičajeni je naziv metoda slobodne raspodjele ili neparametrijska statistika.

Neparametrijski testovi često se rabe iz više razloga. Njihova osnovna prednost je u brzini i jednostavnosti primjene. Naime, većina se neparametrijskih testova provodi na osnovi razlike ili ranga. Uzorak na osnovi kojega se provodi test može se temeljiti na različitim oblicima osnovnih skupova ili dijelova ispitivane populacije o kojoj se vrlo malo zna. To je slučaj kod postavljanja pokusa ili određivanja nultih hipoteza tamo gdje se provode potpuno nova (do tada nepoznata, neprovjerena ili nepotvrđena) istraživanja. Na primjer: uvođenjem posve nove agrotehnike, uporabom do tada neprimjenjenih preparata, kultivara i sličnoga istražuje se relativno novo područje, gdje su rezultati prilično neizvjesni i teško usporedivi s do tada provedenim istraživanjima. Sljedeća prednost neparametrijskih testova ogleda se u povoljnom odnosu učinkovitosti i ekonomičnosti. Naime, neparametrijski testovi, iako manje učinkoviti od parametrijskih, ekonomski su opravdaniji. To pozitivno utječe na ekonomičnost pokusa u cjelini.

Glavni nedostatak neparametrijskih testova u odnosu na parametrijske je smanjena efikasnost. Naime, ako je efikasnost nekoga testa 70%, tada je veličina uzorka za odgovarajući parametrijski test 30% manja, uz postizanje iste učinkovitosti ili preciznosti. Stoga je, u slučajevima kada je poznata raspodjela učestalosti osnovnoga skupa koja je podudarna s već poznatim oblicima, ili se taj uvjet postiže prikladnom transformacijom, primjena neparametrijskih testova manje opravdana.

Kada su podaci dati u formi ranga, gotovo i ne postoji drugi izbor nego li primijeniti neparametrijske metode u postupku testiranja. U znanstveno-istraživačkom radu rabe se brojni neparametrijski testovi. U nastavku ćemo obraditi neke od najčešće primjenjivanih.

19.1. χ^2 TEST

U istraživačkom radu često se obavljaju ispitivanja u kojoj se mjeri učestalosti pojedinih razreda jednoga skupa podudaraju s teorijskim učestalostima. Ako su podaci *kvalitativni* ili im raspodjela značajno odstupa od normalne, moguće je rabiti postupak nazvan χ^2

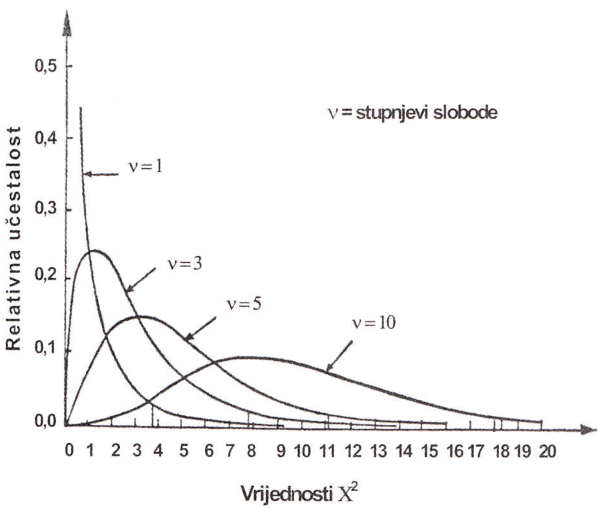
test ili *Chi kvadrat test.* Test je veoma praktičan, a može korisno poslužiti kada se želi utvrditi odstupaju li neke dobivene ili opažene učestalosti od učestalosti koje se očekuju pod određenom pretpostavkom ili hipotezom.

χ^2 test daje odgovor na upit jesu li razlike između opaženih i očekivanih učestalosti rezultat slučajnosti ili nisu? U istraživanju se uobičajeno polazi od određene prepostavke, tzv. „nulte hipoteze" *($H_\varnothing$)*, da nema statistički značajne razlike između opaženih i očekivanih raspodjela učestalosti, odnosno da je ona nastala slučajno. Ako stvarno nema razlike, tada je $\chi^2 = 0$.

Ako razlike nisu statistički značajne, *hipoteza se usvaja.* U tome slučaju izračunata χ^2 vrijednost manja je od tablične vrijednosti *(Tablica IV.)* za prag značajnosti od 0,05, uz odgovarajući broj stupnjeva slobode. To ukazuje na to da se nulta hipoteza u 95% slučajeva usvaja i daje potvrdan odgovor, a u 5% slučajeva odbacuje, odnosno daje negativan odgovor.

Ako su razlike opaženih i očekivanih učestalosti statistički značajne, *hipoteza se odbacuje,* odnosno izračunata χ^2 vrijednost veća je od tablične vrijednosti, za prag značajnosti od 0,05.

Broj stupnjeva slobode zavisi o broju razreda te broju čimbenika potrebitih za opisivanje teorijske raspodjele. U slučaju normalne raspodjele, gdje se rabi aritmetička sredina i standardna devijacija za procjenu čimbenika očekivane ili teorijske raspodjele, „gube se" dva stupnja slobode, plus još jedan stupanj slobode za određivanje varijance uzorka. Prema tome, broj stupnjeva slobode pri provođenju hi – kvadrat testa kod normalne raspodjele je broj razreda minus tri. Slično je i kod binomne rapodjele.



Slika 19.1. Raspodjela uzoraka χ^2 uz različite stupnjeve slobode

Kod Poissonove raspodjele samo je jedan stupanj slobode iskorišten, jer je aritmetička sredina jednaka varijanci. Niti jedan dopunski stupanj slobode nije utrošen kada se opažena raspodjela uspoređuje s nekom poznatom ili hipotetičnom raspodjelom. U tome slučaju broj stupnjeva slobode, glede iščitavanja tabličnih vrijednosti, bit će broj razreda minus jedan.

χ^2 test primjenjuje se kod jednodimenzionalne i kod dvodimenzionalne klasifikacije. Kod posljednje, podaci su svrstani prema dva obilježja promatranja. Svako od tih obilježja može imati dvije ili više grupa. Broj stupnjeva slobode za χ^2 test, kod dvodimenzionalne klasifikacije, računa se iz umnoška $\nu = (r-1)(k-1)$. U tablici podataka, *r* je broj redova, a *k* broj kolona. Postupak za uspoređivanje grupa promatranih ili opaženih učestalosti s teorijskim ili očekivanim učestalostima, koje odgovaraju nekoj teorijskoj raspodjeli, naziva se *Goodness of fit,* a moguće ga je provesti pomoću hi – kvadrat testa. U nastavku će biti prikazana primjena χ^2 testa pri ispitivanju podudarnosti opažene raspodjele s teorijskom, Poissonovom raspodjelom.

Na osnovi podataka o broju uginulih kukaca po uzorku, provest ćemo χ^2 test:

Tablica 19.1. Prikaz opaženih i očekivanih raspodjela učestalosti za χ^2 test

Broj uginulih kukaca po uzorku x_i	Opažena učestalost f_{op}	Očekivana učestalost $f_{oč}$
0	5	3,36
1	8	9,07
2	15	12,24
3	12	11,02
4	2	7,44
5	1	4,01
6	2	1,81
7	4	0,69
8	1	0,23
9	0	0,07
Σ	50	49,94

S obzirom na to da niti jedna očekivana učestalost ne smije biti manja od pet, jedinice koje imaju manju učestalost spajaju se u jednu grupu.

Tablica 19.2. Postupak izračunavanja χ^2 testa

Broj uginulih kukaca po uzorku x_i	Opažena učestalost f_{op}	Očekivana učestalost $f_{oč}$	$f_{op} - f_{oč}$	$\frac{(f_{op} - f_{oč})^2}{f_{oč}}$
0	5	3,36	1,64	0,80
1	8	9,07	-1,07	0,13
2	15	12,24	2,76	0,62
3	12	11,02	0,98	0,09
4 i više	10	14,25	-4,25	1,27
Σ	50	49,94		2,91

$$\chi^2 = 2,91$$

Kako je za $\nu = n - 1 = 5 - 1 = 4$ i izračunati $\chi^2 = 2,91 < \chi^2 tabl_{0,05}(11,07)$, opažena raspodjela statistički se značajno *ne razlikuje* od Poissonove raspodjele.

Za pravilnu primjenu χ^2 testa, moraju biti ispunjeni određeni preduvjeti, na primjer:

- *Hi – kvadrat test može se računati samo s učestalostima, nipošto s aritmetičkim sredinama, postocima ili odnosima.*
- *Zbroj očekivanih učestalosti mora biti jednak zbroju promatranih ili opaženih učestalosti.*

19.1.1. PRIMJENA χ^2 TESTA KOD DVODIMENZIONALNE KLASIFIKACIJE

U slučajevima kada se ispituju dva obilježja, primjenjuje se dvodimenzionalna klasifikacija. Svako obilježje može imati dvije ili više grupa. Pokusni podaci najčešće se prikazuju tablično i to u obliku *r* * *k* tablice, gdje je *r* broj redova, a *k* broj kolona.

Test o jednakoj zastupljenosti ili proporciji jedinica promatranja prema ispitivanim obilježjima u uzorcima često se naziva i test homogenosti, a provodi se izračunavanjem:

$$\chi^2 = \frac{(n_1 + n_2)(ad - cb)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

Potrebiti parametri za izračunavanje gornje formule dobivaju se na način prikazan u sljedećoj tablici.

Tablica 19.3. Opći oblik tablice 2 x 2

Uzorci	Obilježja promatranja		Σ
	Op₁	**Op₂**	
1	$n_1 p = a$	$n_1 q = b$	$n_1 = n_1 p + n_1 q = a + b$
2	$n_2 p = c$	$n_2 q = d$	$n_2 = n_2 p + n_2 q = c + d$
Σ	$n_1 p + n_2 p = a + c$	$n_1 q + n_2 q = b + d$	$n_1 + n_2 = n_1 p + n_2 p + n_1 q + n_2 q =$ $= a + b + c + d$

Broj stupnjeva slobode se za 2 x 2 tablice izračunava iz produkta $(r-1)(k-1)$. Putem tablica χ^2 raspodjele se uz određeni prag značajnosti usvaja ili odbacuje nulta hipoteza o ujednačenoj proporciji uzoraka, odnosno homogenosti jedinica promatranja u uzorku.

Tablica 19.4. Ispitivanje ujednačenosti proporcija ili zastupljenosti ribljih vrsta u ishrani kormorana

Uzorci	*Obilježja promatranja*		Σ
	Šaran, Op₁	***Smuđ, Op₂***	
1	*336 (331,03)*	*9 (13,97)*	***345***
2	*280 (284,97)*	*17 (12,03)*	***297***
Σ	***616***	***26***	***642***

Za izračunavanje vrijednosti očekivanih ili teorijskih raspodjela (nalaze se u zagradi) rabe se marginalne vrijednosti pripadajućega reda i stupca, odnosno:

$$\frac{616}{642}*345 = 331{,}03\,; \quad \frac{26}{642}*345 = 13{,}97\,; \quad \frac{616}{642}*297 = 284{,}97\,; \quad \frac{26}{642}*297 = 12{,}03$$

$$\chi^2 = \frac{(345+297)(336*17 - 280*9)^2}{345*297*616*26} = 3{,}98$$

Nulta hipoteza o jednakosti proporcija šarana i smuđa u ispitivanim uzorcima odbacuje se uz $(r-1)(k-1) = 1$ stupanj slobode i $\alpha_{0,05} = 3{,}84$.

Ako provedemo χ^2 test na „klasičan način", rabeći formulu $\chi^2 = \frac{\left(f_{op} - f_{oč}\right)^2}{f_{oč}}$, dobit ćemo identičan rezultat.

Provjerimo navedeno!

$$\chi^2 = \frac{(336-331{,}03)^2}{331{,}03} + \frac{(9-13{,}97)^2}{13{,}97} + \frac{(280-284{,}97)^2}{284{,}97} + \frac{(17-12{,}03)^2}{12{,}03} = 3{,}98$$

2x2 tablica

Nadalje, prikazat ćemo i primjenu χ^2 testa pri ispitivanju nezavisnosti uzoraka, kod kojih svako od dva ispitivana obilježja ima po dva atributa. I u ovome slučaju riječ je o 2 * 2 tablici.

Tablica 19.5. Opći oblik tablice 2 x 2 kod ispitivanja nezavisnosti dvije kategorije podataka

Obilježje promatranja **(A)**	Obilježje promatranja **(B)**		Σ
	B_1	B_2	
A_1	a	b	a + b
A_2	c	d	c + d
Σ	a + c	b + d	a + b + c + d

Tablica 19.6. Izračunavanje očekivanih učestalosti kod tablice 2 x 2

Obilježje **(A)**	Obilježje **(B)**		Σ
	B_1	B_2	
A_1	$\frac{((a+c)(a+b))}{a+b+c+d}$	$\frac{((b+d)(a+b))}{a+b+c+d}$	a + b
A_2	$\frac{((a+c)(c+d))}{a+b+c+d}$	$\frac{((b+d)(c+d))}{a+b+c+d}$	c + d
Σ	a + c	b + d	a + b + c + d

χ^2 test izračunava se na osnovi sljedeće formule:

$$\chi^2 = \frac{\left[\left|a - \frac{(a+c)(a+b)}{a+b+c+d}\right| - 0{,}5\right]^2}{\frac{(a+c)(a+b)}{a+b+c+d}} + \ldots + \frac{\left[\left|d - \frac{(b+d)(c+d)}{a+b+c+d}\right| - 0{,}5\right]^2}{\frac{(b+d)(c+d)}{a+b+c+d}}$$

Glede korekcije moguće pogreške, a prilikom aproksimacije binomne raspodjele normalnom raspodjelom, rabi se sjedeća formula:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{\left(\left|f_{op} - f_{oč}\right| - 0{,}5\right)^2}{f_{oč}}$$

Korekcija se provodi tako da se od razlike vrijednosti otklona opaženih od očekivanih učestalosti oduzima 0,5. Ona nema nekoga većega učinka kod velikih uzoraka i gotovo se isključivo primjenjuje u testovima s jednim stupnjem slobode. Primjenom bilo koje od dvije navedene formule dobiva se ista χ^2 vrijednost.

U odnosu na prethodni primjer, ispitat ćemo, pored zastupljenosti šarana i smuđa *(A)* u ishrani kormorana, i njihovu zastupljenost prema spolovima ptica *(B)*.

Tablica 19.7. Raspodjela ribljih vrsta prema spolovima kormorana

	Mužjak	Ženka	Σ
Šaran	*170 (169,42)*	*166 (166,57)*	*336*
Smuđ	*8 (8,57)*	*9 (8,43)*	*17*
Σ	*178*	*175*	*353*

Očekivane učestalosti (u zagradama) izračunavaju se na osnovi marginalnih vrijednosti kao u prethodnome primjeru. χ^2 vrijednost izračunava se na sljedeći način:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{\left(\left|f_{op} - f_{oč}\right| - 0,5\right)^2}{f_{oč}}$$

U slučaju da zastupljenost ribljih vrsta nema nikakve zavisnosti sa spolom kormorana, moguće je očekivati slične zastupljenosti šarana i smuđa, kako kod ženki tako i kod mužjaka kormorana. Kod potpune nezavisnosti, raspored opaženih učestalosti odgovarao bi očekivanim. To ćemo provjeriti χ^2 testom:

$$\chi^2 = \frac{\left(\left|170 - 169,42\right| - 0,5\right)^2}{169,42} + \frac{\left(\left|166 - 166,57\right| - 0,5\right)^2}{166,57} + \frac{\left(\left|8 - 8,57\right| - 0,5\right)^2}{8,57} + \frac{\left(\left|9 - 8,43\right| - 0,5\right)^2}{8,43} = 0,00129$$

Glede izuzetno male χ^2 vrijednosti, nezavisnost uzoraka je potvrđena, odnosno nulta se hipoteza usvaja.

r x k tablica

Kada je svako od ispitivanih obilježja zastupljeno s više od dva svojstva riječ je o *r x k* tablici. Raspodjela elemenata za izračunavanje χ^2 vrijednosti, u općemu slučaju, prikazana je u sljedećoj tablici:

Tablica 19.8. Tablica *r x k* u testu nezavisnosti uzoraka

Grupa obilježja (A)	Grupa obilježja (B)										Σ
	B_1	B_2	B_3	·	·	B_j	·	·	·	B_k	
A_1	n_{11}	n_{12}	n_{13}	·	·	n_{1j}	·	·	·	n_{1k}	n_{a1}
A_2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	·	·	n_{2j}	·	·	·	n_{2k}	n_{a2}
A_3	n_{31}	n_{32}	n_{33}	·	·	n_{3j}	·	·	·	n_{3k}	n_{a3}
.											
A_i	n_{i1}	n_{i2}	n_{i3}	·	·	n_{ij}	·	·	·	n_{ik}	n_{ai}
.											
.											
A_r	n_{r1}	n_{r2}	n_{r3}	·	·	n_{rj}	·	·	·	n_{rk}	n_{ar}
Σ	n_{b1}	n_{b2}	n_{b3}	·	·	n_{bj}	·	·	·	n_{bk}	n

Kao što je vidljivo iz rasporeda elemenata matrice, svaka jedinica promatranja istovremeno pripada grupama obilježja A_i reda i B_j kolone. To znači da se, u općemu slučaju, ispituje *k* uzoraka s *r* svojstava grupe obilježja *A* te *r* uzoraka s *k* svojstava grupe obilježja *B*. Test nezavisnosti nam daje odgovor da li se *k* uzoraka s *r* svojstava grupe obilježja *A* mogu smatrati ujednačenim s proporcijama osnovnoga skupa, odnosno očekivanim vrijednostima. Ili, pak, može li se *r* uzoraka s *k* svojstava grupe obilježja *B* smatrati ujednačenim s očekivanim proporcijama osnovnoga skupa.

Kao i kod ranijih tablica, i ovdje se (kod *r x k* tablice kontingencije), na osnovi marginalnih vrijednosti (suma), izračunavaju očekivane učestalosti i to na sljedeći način:

$$\frac{n_{ai} n_{bj}}{n} = o\check{c}_{ij}$$

Test nezavisnosti uzoraka i svojstava po grupama obilježja provodi se izračunavanjem χ^2 vrijednosti za $(r-1)(k-1)$ stupnjeva slobode:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k} \frac{(n_{ij} - o\check{c}_{ij})^2}{o\check{c}_{ij}}$$

PRIMJER 19.1. U sljedećoj tablici prkazani su podaci istraživanja primjene različitih smjesa u hranidbi peradi. Očekivane učestalosti izračunavaju se na osnovi marginalnih vrijednosti ili suma redova i kolona, na osnovi opaženih učestalosti. χ^2 testom potrebito je ispitati hipotezu o nezavisnosti između pasmine svinja i načina hranidbe ili vrste primjenjenih smjesa.

Tablica 19.9. Težine svinja (kg) pri različitim načinima hranidbe (S_i)

Pasmine svinja	Načini hranidbe ili smjese			Σ
	S_1	S_2	S_3	
PIETREN	*94 (93,49)*	*98 (98,86)*	*97 (96,65)*	*289*
VELIKI JORKŠIR	*103 (104,49)*	*112 (110,49)*	*108 (108,02)*	*323*
NJEMAČKI LANDRAS	*99 (98,02)*	*103 (103,65)*	*101 (101,33)*	*303*
Σ	*296*	*313*	*306*	*915*

Na osnovi tabličnih raspodjela učestalosti, izračunava se χ^2 vrijednost:

$$\chi^2 = \frac{(94-93{,}49)^2}{93{,}49} + \frac{(98-98{,}86)^2}{98{,}86} + \frac{(97-96{,}65)^2}{96{,}65} + \ldots + \frac{(101-101{,}33)^2}{101{,}33} = 0{,}07$$

Kako je izračunata χ^2 vrijednost znatno manja od kritičnoga praga značajnosti $\alpha_{0,05} = 9{,}49$ za $(r-1)(k-1) = 4$ stupnja slobode, usvaja se nulta hipoteza o nezavisnosti između pasmina svinja i načina hranidbe ili primjenjenih smjesa.